Cours I : SUITES NUMERIQUES

I Quelques rappels

1/ Définition

Définition : Une suite (u_n) est une application de l'ensemble $\mathbb{N}$ ou une partie de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ qui à chaque élément n de $\mathbb{N}$ associe un unique élément noté u_n, appelé terme d'indice n de la suite (u_n).

2/ Comment définir une suite

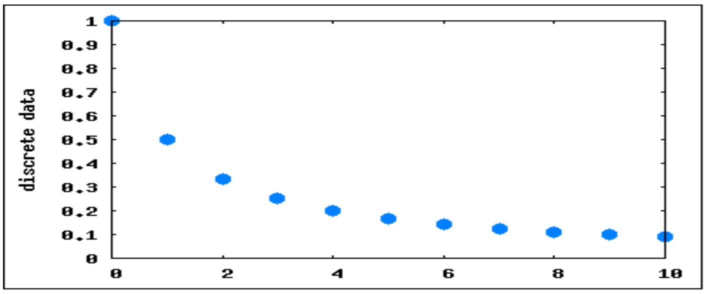
a/ Définition explicite

Définition : Une suite (u_n) est dite explicite s'il est possible de calculer directement u_n à partir de n. On note alors $u_n = g(n)$ avec g une fonction définie sur $\mathbb{N}$ (et le plus souvent sur $\mathbb{R}^+$ également).

Ex : : $u_n = \frac{1}{n+1}$;

```
(%i49) u[n]:=1/(n+1);
(%i50) u[5];
(%o50) 1/6
(%i51) makelist([n,u[n]],n,0,5);
(%o51) [[0,1],[1,1/2],[2,1/3],[3,1/4],[4,1/5],[5,1/6]]

(%i52) wxplot2d([discrete,makelist(n,n,0,10),makelist(u[n],n,0,10)],[style,points])
```



b/ Suite définie par récurrence

Définition : Une suite est définie par récurrence si le terme u_{n+1} peut être défini à partir de u_n :

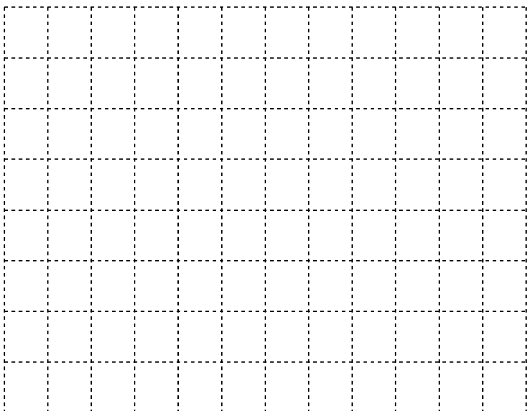
$$u_{n+1} = f(u_n) \text{ avec } f \text{ une fonction définie le plus souvent sur } \mathbb{R}$$

Ex : Soit (u_n) tel que $u_{n+1} = 0.5\ u_n + 2$ et $u_0 = 1$

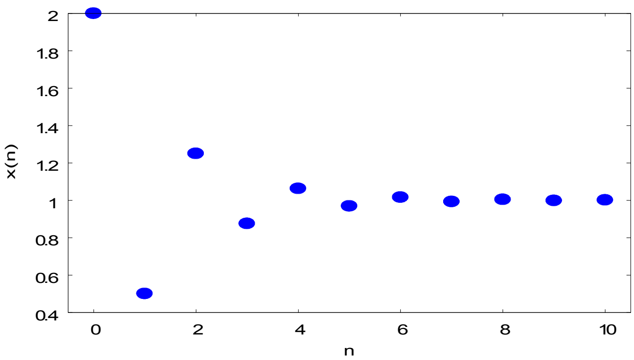
Lecture graphique de u_1 ; u_2...

Construire les droites d'équation $y = x$ et $y = x + 2$.

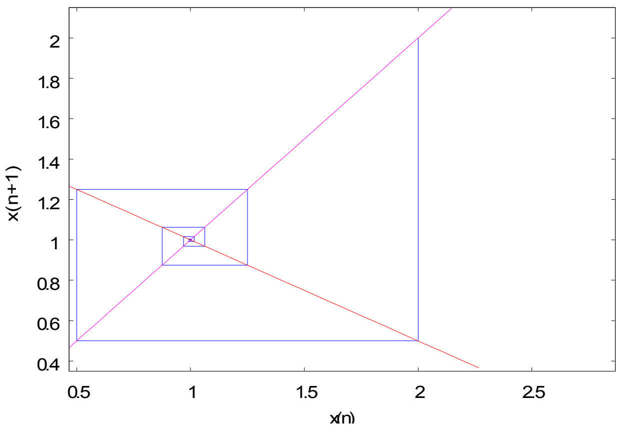
Déterminer graphiquement u_1, u_2, u_3.



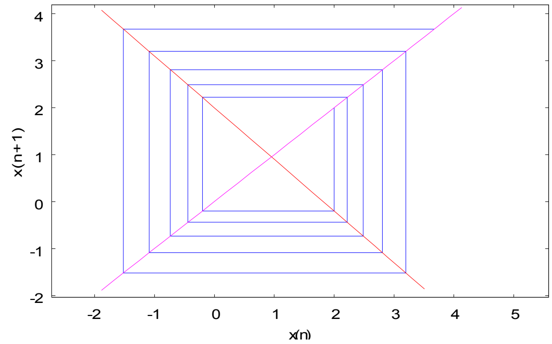
```
(%i56) f(x):=1.5-0.5*x;
(%i54) v[0]:2;v[n]:=f(v[n-1]);
(%i58) load(dynamics);
(%i63) evolution(f(x),2,10);
```



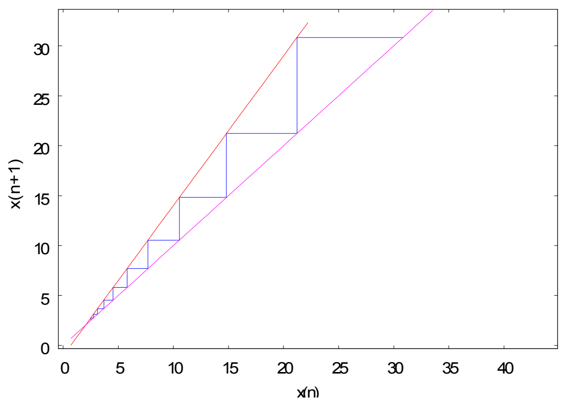

```
(%i65) staircase(f(x),2,10);
```




```
(%i73) f(x):=2-1.1*x;
```




```
(%i77) f(x):=-1+1.5*x;
```



3/ Sens de variation d'une suite

Notation : $\exists$ signifie « il existe » et $\forall$ « quelque soit »

Définition : - Une suite (u_n) est strictement croissante si :

$$\exists\, N \in \mathbb{N}, \text{ tel que } \forall\ n > N,\ u_n < u_{n+1}$$

- Une suite (u_n) est strictement décroissante si :

Ex : Etudier le sens de variation des suites :

1. (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n^2 + n$

2. (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_{n+1} = \sqrt{(u_n)}$, $u_0=2$

II Suites arithmétiques et géométriques (rappels)

a. Suite arithmétiques

Définition : Une suite (u_n) est une suite arithmétique si :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\quad \mathbf{u_{n+1} = u_n + r}$$

r est appelé la raison de la suite.

Calcul direct de u_n : On a alors $\boldsymbol{u_n = u_0 + nr}$

Somme de termes consécutifs, *S* :

$S = u_0 + u_1 + ... + u_n$ S = nb de termes $\times \dfrac{premier \cdot terme + dernier \cdot terme}{2}$

Cas particulier : $S = 1+2+\ldots+n = \dfrac{n\times(n+1)}{2}$

Ex : Montrer que la suite (u_n) définie par $u_n = 2n+1$ est arithmétique. Calculer $S = u_5 + ... + u_{16}$.

b. Suite géométriques

Définition : Une suite (u_n) est une suite géométrique si :

q est appelé la raison de la suite.

Calcul direct de u_n : On a alors $\boldsymbol{u_n = u_0\, q^n}$

Somme de termes consécutifs :

$S = u_0 + u_1 + ... + u_n$ S = premier terme $\times \dfrac{1 - q^{nb \cdot termes}}{1 - q}$

cas particulier : $1+q+q^2+\ldots+q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$ $(q\neq 1)$

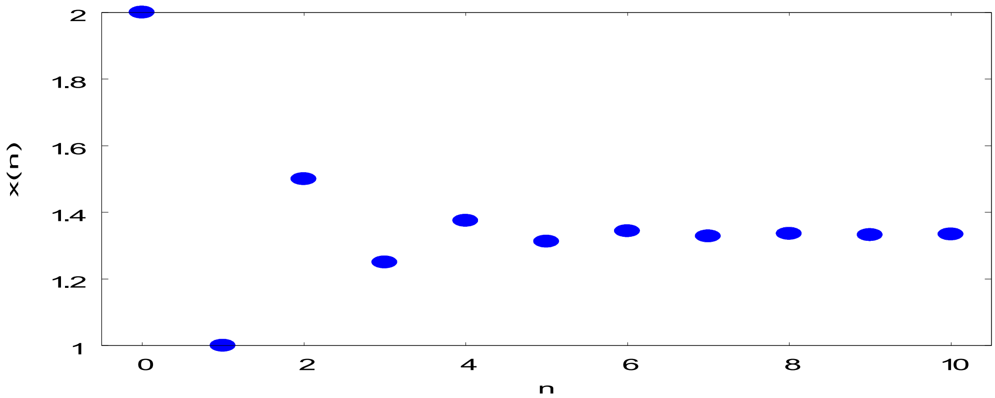
Ex : Montrer que la suite (u_n) définie par $u_n = 2^{-n}/3^{n-2}$ est géométrique. Calculer S=u5+…+u16.

III Limite d'une suite

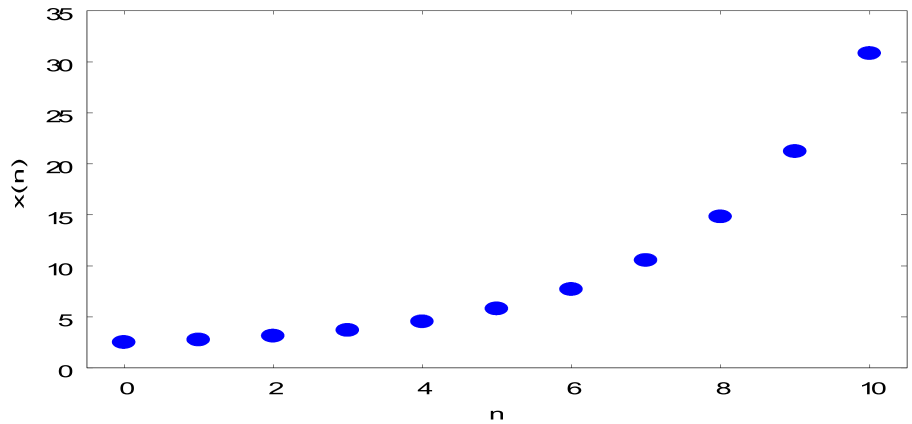
1/ Notion de limite d'une suite

Définition : Pour une suite numérique (u_n), il y a 3 types de limites :

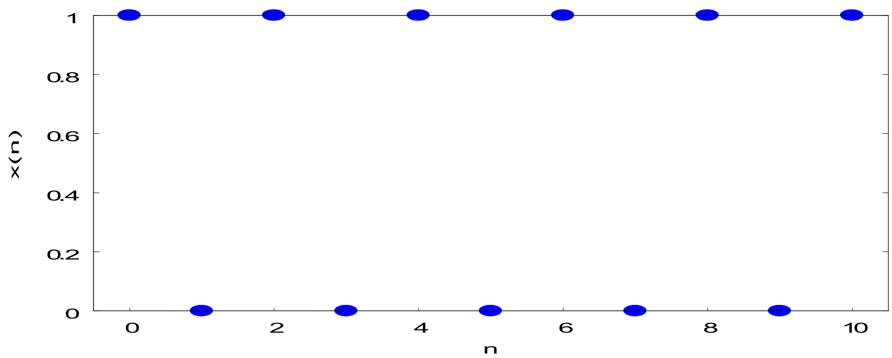
- **(u_n) converge vers une limite finie L. (u_n) est dite convergente.** $u_{n+1} = 2-0,5\ u_n$



- **(u_n) admet une limite $+\infty$ ou $-\infty$. (u_n) est dite divergente.** $u_{n+1}= -1+1,5\ u_n$



- **(u_n) n'admet pas de limite. (u_n) est dite divergente.** $u_{n+1} = 1 - u_n$



Propriété : Soit une suite (u_n) définie par $u_n = f(n)$.

Si $f(x)$ admet une limite L en $+\infty$, alors on dit que la suite (u_n) admet la limite L en $+\infty$

Ex : Soit $u_n = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$. Calculer la limite de (u_n).

2/ Application aux suites géométriques

Propriété : Soit une suite géométrique (u_n) définie par sa raison q ($q>0$) et son premier terme $u_0=1$, $u_n = q^n$. On a alors :

• si $q > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$ • si $q=1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 1$ • si $|q| <1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$

Remarque : On retrouve ces limites en écrivant : $q^n = e^{n\ln(q)}$. Si $q>1$, $\ln(q) >0$ ...

Ex : Soit $u_n=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$ définie sur $\mathbb{N}$. Calculer sa limite et déterminer le plus petit entier n tel que $u_n<10^{-3}$

3/ Suites croissantes majorées

Propriété 1 : Si une suite (u_n) est croissante et majorée alors elle converge.

Propriété 2 : Si une suite (u_n) est décroissante et minorée alors elle converge.

Ex : Soit $u_n=1+ +...\left(\frac{1}{2}\right)^n$. Démontrer que u_n est croissante et majorée. Conclure.

III Ordre et comparaison de limites de suites

1/ Compatibilité avec l'ordre.

Théorème : Soit deux suites (u_n) et (v_n) telles que :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = L \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} v_n = L'$$

Si à partir d'un certain rang N, on a toujours : $u_n \leq v_n$ alors $L \leq L'$

2/ Théorèmes de comparaison

Théorème 1 : Soit un réel L.

Si à partir d'un certain rang N on a $|u_n - L| \leq v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$

Exemple incontournable: Soit (u_n) telle que : $|u_{n+1}-2|\leq \frac{1}{2}|u_n-2|$ et $u_0 = 3$.

a/ Démontrer par récurrence que $|u_n-2|\leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

b/ En déduire la limite de u_n.

c/ Trouver p tel que si $n>p$ alors $|u_n-2|<10^{-3}$.

Théorème (dit des gendarmes): Soient trois suites *(u_n) (v_n) et (w_n)*.
Si à partir d'un certain rang N, on a :

$$v_n \leq u_n \leq w_n \text{ et } \lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} w_n = L \quad \text{alors} \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = L$$

Ex: soit (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{n+\sin(n)}{n^2+1}$. Etudier la convergence de cette suite. En déduire sa limite.

3/ Suites adjacentes

Définition : Deux suites (u_n) et (v_n) sont dites adjacentes ssi
- (u_n) est croissante
- (v_n) est décroissante
- $\lim_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$.

Propriété : Deux suites adjacentes sont convergentes vers une même limite L.

Méthode du Héron pour approximer $\sqrt{(2)}$:

Soit (u_n) et (v_n) définies par : $u_0 = 1$, $u_n = \frac{1}{2}(u_n + v_n)$ et $v_n = \dfrac{2}{u_n}$

Démontrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes et conclure.